Filière PC , PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée : 3 heures

Dans tout le problème E désigne un espace euclidien de dimension n, $n \geq 1$, et l'on note:

- (|) un produit scalaire défini sur E, $\| \ \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Si m est un entier naturel non nul, on note:

- $M_{m,1}(\boldsymbol{R})$, l'ensemble des matrices colonnes à m lignes à coefficients réels.
- Si $X \in M_{m,1}(\boldsymbol{R})$, $\|X\|_2 = \sqrt{{}^t X.X}$ et $S_m = \{ X \in M_{m,1}(\boldsymbol{R}) / \|X\|_2 = 1 \}$.
- $M_m(\boldsymbol{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre m à coefficients réels et $O_m(\boldsymbol{R})$, le sous ensemble de $M_m(\boldsymbol{R})$, des matrices orthogonales.
- Si $M \in M_m(\boldsymbol{R})$, $\|M\|_2 = \sup_{X \in S_m} \|M.X\|_2$.
- Si $M \in M_m(\boldsymbol{R})$, on note $Sp(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres et pour $\lambda \in Sp(M)$, $E(\lambda, M)$ le sous espace propre correspondant.

Les résultats généraux, établis dans la partie 1 dans un cadre matriciel, seront utilisés par la suite, pour définir une notion d'angle entre deux sous espaces vectoriels et démontrer quelques propriétés de cette notion.

Partie 1

- Soit $B \in M_m(\boldsymbol{R})$. On pose $A = ({}^t B).B$.

1. Montrer qu'il existe $T \in O_m(\mathbf{R})$ **telle que** $({}^t T).A.T$ soit une matrice diagonale.

- On pose $A^{\#} = B.({}^t B)$. On note de plus Φ , l'endomorphisme de $M_{m,1}(\boldsymbol{R})$, défini par:

$$\forall X \in M_{m,1}(\boldsymbol{R}), \ \Phi(X) = B.X .$$

2. Soit λ une valeur propre non nulle de A .

a) Montrer que $Ker(\Phi) \cap E(\lambda, A)$ est réduit à la matrice colonne nulle.

b) Etablir simultanément que λ est une valeur propre de $A^{\#}$ et que $\Phi\big(E(\lambda, A)\big) \subset E(\lambda, A^{\#})$.

c) En déduire que $\dim\big(E(\lambda, A)\big) = \dim\big(E(\lambda, A^{\#})\big)$.

3. Démontrer, en utilisant les questions 1 et 2, que A et $A^{\#}$ sont semblables.

4. On suppose, de plus, que $\|B\|_2 \leq 1$. Soit λ, une valeur propre de A et, $X \in E(\lambda, A)$.

a) Calculer $\|B.X\|_2^2$ en fonction de λ et de $\|X\|_2$.

b) En déduire que $\lambda \in [0, 1]$.

Partie 2

- F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, de dimension m, non nulle.
- On appelle p_F le projecteur orthogonal sur F et π_F l'unique application linéaire de G dans F qui coïncide avec p_F sur G. On définit de même p_G et, π_G application linéaire de F dans G.
- Soient $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_m)$ et $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_m)$ des bases orthonormées de F et de G respectivement. On note $B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\pi_F)$, matrice de π_F dans les bases $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$.

1. Montrer que : $B_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = ((u_i|v_j))_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m}$. En déduire que: $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(\pi_G \circ \pi_F) = ({}^t B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}).B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$.

2. Soit x un élément de G et X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{V}$ de G.

a) Etablir l'égalité suivante: $\|B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}.X\|_2 = \|p_F(x)\|$.

b) En déduire que : $\|B_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\|_2 \leq 1$.

3. En utilisant la partie 1, en conclure qu'il existe:

a) une base orthonormée $\mathcal{W}$ de G,

b) un unique m uplet $(t_1, \ldots, t_m)$ appartenant à $\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)^m$, avec $t_1 \leq \ldots \leq t_m$,

tels que: $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}(\pi_G \circ \pi_F) = \begin{bmatrix} \cos^2(t_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \cos^2(t_m) \end{bmatrix}$.

Montrer que le m uplet $(t_1, \ldots, t_m)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{W}$.

- On peut alors définir l'angle du couple (F,G) par: $\mathcal{A}ngle(F,G) = (t_1, \ldots, t_m)$.

4. *Exemples :* $E = \mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique.

a) F et G sont les droites vectorielles engendrées respectivement par les vecteurs (1,1,0) et (1,0,1). Déterminer $\mathcal{A}ngle(F,G)$.

b) $F = \{(x,y,z) \in E \,/\, y = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in E \,/\, y - z = 0\}$.

Déterminer $\mathcal{A}ngle(F,G)$ et $\mathcal{A}ngle(F^\perp, G^\perp)$.

5. En utilisant la partie 1 établir que $\mathcal{A}ngle(F,G) = \mathcal{A}ngle(G,F)$.

6. Montrer que: $\forall x \in G$, $(x \,|\, (\pi_G \circ \pi_F)(x)) = \|p_F(x)\|^2$. (on pourra utiliser la question 2.a).)

7. On note r le nombre de composantes de $\mathcal{Angle}(F,G)$ égales à 0.

a) Etablir que: $\forall\ x \in G,\ \|p_F(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow x \in F$.

b) En déduire, en utilisant la question 6, que: $r = \dim(F \cap G)$. Que peut-on en conclure lorsque $r = m$?

8. On note s le nombre de composantes de $\mathcal{Angle}(F,G)$ égales à $\frac{\pi}{2}$. En utilisant la question 6, montrer que:

$s = \dim(F^{\perp} \cap G)$.

Partie 3

- On utilise les notations introduites dans la partie 2 en supposant que $m < n$.
- On note I_E l'application identité de E.

- On compare dans cette partie $\mathcal{Angle}(F,G)$ et $\mathcal{Angle}(F^{\perp},G^{\perp})$.

1. Exprimer les projecteurs orthogonaux sur $F^{\perp}$ et sur $G^{\perp}$ en fonction de I_E, p_F, p_G.

2. Soit x un vecteur propre de $\pi_G \circ \pi_F$ pour la valeur propre λ, λ différente de 1.

On pose $y = x - p_F(x)$ et l'on pose $t = \text{Arcos}(\sqrt{\lambda})$.

a) Montrer que y n'est pas le vecteur nul de E et qu'il appartient à $F^{\perp}$.

b) Calculer $(I_E - p_G)(y)$ en fonction de λ, x, et $p_F(x)$.

c) En déduire que λ est une valeur propre de $(I_E - p_F) \circ (I_E - p_G)$ et que y est un vecteur propre associé.

d) En conclure que le nombre de composantes de $\mathcal{Angle}(G^{\perp}, F^{\perp})$ égales à t, est supérieur ou égal, au nombre de composantes de $\mathcal{Angle}(F,G)$ égales à t.

3. En conclure que $\mathcal{Angle}(F,G)$ et $\mathcal{Angle}(F^{\perp}, G^{\perp})$ ne peuvent différer que par leur nombre de composantes égales à 0.

4. *Exemple :* $E = \mathbf{R}^5$, muni du produit scalaire canonique. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ la base orthonormée canonique de E. Soient F et G les sous espaces vectoriels de E définis par:

- $F = \{(x_1,\ldots,x_5) \in E \,/\, x_1 = x_2, x_2 = x_3\}$.
- $G = \{(x_1,\ldots,x_5) \in E \,/\, x_3 = x_4, x_4 = x_5\}$.

a) Soit $\vec{v} \in E$. Montrer que: $\vec{v} \in F \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{v}|(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)) = 0 \\ (\vec{v}|(\vec{e}_2 - \vec{e}_3)) = 0 \end{cases}$.

b) Déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$. En déduire une base orthonormée de $G^{\perp}$.

c) Montrer que $\mathcal{Angle}(F^{\perp}, G^{\perp}) = \left(\text{Arcos}\left(\frac{2}{3}\right), \frac{\pi}{2}\right)$. En déduire $\mathcal{Angle}(F,G)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail